

基于节点效率的超网络重要节点识别算法

蓝春江, 涂贵宇, 杨 桢, 张天军, 潘文林

(云南民族大学 数学与计算机科学学院, 云南 昆明 650504)

摘要: 针对超网络重要节点识别方法存在特征维度单一、分析视角局限的问题, 构建了一种融合超度特征与节点效率的超网络重要节点识别算法。该算法利用超度表征节点的局部信息, 通过影响系数调节邻域节点贡献度, 并结合节点效率刻画全局拓扑影响力, 实现了对节点重要性的综合评估。在4个真实超网络中进行单调性分析、抗毁性测试及SIR传播模型验证, 实验结果表明, 该算法能够准确识别出超网络中的重要节点。

关键词: 超网络; 重要节点识别; 超度; 影响系数; 节点效率

DOI: 10.11907/rjdk.251421

扫描二维码阅读全文:



中图分类号: TP301.5

文献标识码: A

文章编号: 1672-7800(2026)009-0091-07

Identification Algorithm of Important Nodes in Hypernetwork Based on Node Efficiency

LAN Chunjiang, TU Guiyu, YANG Cheng, ZHANG Tianjun, PAN Wenlin

(School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming 650504, China)

Abstract: To address the issues of single feature dimension and limited analytical perspective in hypernetwork important node identification methods, a hypernetwork important node identification algorithm that integrates hyperdegree features and node efficiency was developed. This algorithm uses hyperdegree to represent the local information of nodes, adjusts the contribution of neighboring nodes through an influence factor, and combines node efficiency to depict global topological influence, achieving a comprehensive evaluation of node importance. Through monotonicity analysis, robustness testing, and SIR propagation model verification on four real hypernetworks, experimental results show that the algorithm can accurately identify important nodes in hypernetworks.

Key Words: hypernetwork; important node identification; hyperdegree; influence coefficient; node efficiency

0 引言

复杂网络理论作为研究复杂系统的重要工具, 已在社会网络分析、生物信息学和交通规划等领域展现出强大的解释力^[1]。其中, 关键节点识别作为网络分析的核心问题之一, 对于理解网络结构、预测系统行为以及优化网络性能具有关键意义^[2]。

近年来, 基于超图结构的超网络(Hypernetwork)作为

描述多元交互关系的重要工具, 在社交网络、生物网络和交通系统等领域展现出强大的表征能力, 超网络中关键节点的识别也受到了广泛关注^[3-4]。目前, 针对超网络关键节点识别已经提出了许多方法, 如超度^[3]、邻接超度^[3]、介数中心性^[5]和接近中心性^[6]等。Estrada等^[7]发展了适用于超网络的子图中心性和聚类分析框架, 并在实证网络中验证了算法的实用性。Kovalenko等^[8]提出了向量中心性方法, 虽能刻画节点在不同阶次交互中的动态角色, 但计算复杂度随超边规模的增加急剧上升。Benson等^[9]强调

收稿日期: 2025-06-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(62362071)

作者简介: 蓝春江(2000-), 女, 云南民族大学数学与计算机科学学院硕士研究生, 研究方向为智能计算、复杂网络; 涂贵宇(2002-), 女, 云南民族大学数学与计算机科学学院硕士研究生, 研究方向为智能计算; 杨桢(1980-), 女, 硕士, 云南民族大学数学与计算机科学学院副教授、硕士生导师, 研究方向为知识图谱、数据挖掘、人工智能; 张天军(1970-), 男, 硕士, 云南民族大学数学与计算机科学学院副教授、硕士生导师, 研究方向为计算机网络技术; 潘文林(1972-), 男, 博士, CCF高级会员, 云南民族大学数学与计算机科学学院教授、硕士生导师, 研究方向为智能计算、软件工程、数据治理与数据工程、城市大脑与智慧城市。本文通讯作者: 潘文林。

高阶中心性是超网络研究的国际前沿方向。吴英哈等^[10]通过信息熵量化节点在超网络中的信息传播随机性,并利用传播熵来表征节点的重要性。Xie等^[11]基于传播动力学的影响力最大化算法,揭示了超网络中的高影响力重叠现象。周丽娜等^[12]融合超度与 *K-shell* 值,基于欧氏距离公式构建复合参数识别方法,但该方法对网络规模变化的适应性有待验证。Xie等^[13]发展的 HGC (Hypergraph Gravity Centrality) 方法及其半局部变体 LHGC (Local Hypergraph Gravity Centrality),在精度与效率间取得了平衡,但对超边异质性的处理不够充分。周丽娜等^[14]基于信息熵的评估模型,虽结合了节点及其直接与间接邻居的关联特性,但仅聚焦于局部拓扑特征。涂贵宇等^[15]提出的多维度熵分析方法,虽然综合了节点度、邻接度及超度等指标,但对节点全局传播特性的刻画不足。朱福祺等^[16]构建的多指标决策矩阵,虽能反映节点拓扑特征,却未能有效融合节点自身属性特征。总体而言,现有研究方法存在一定局限:部分方法过度依赖节点的局部属性,未能充分考虑邻域拓扑结构与节点影响力的协同作用;另一类方法则只关注网络的全局拓扑特征,忽略了网络局部的影响。这种单一维度的分析视角,导致现有研究普遍缺乏对多维度特征的系统性综合分析。

因此,本文提出了一种基于综合超度和节点效率的超网络重要节点识别算法 CDE (Comprehensive Dimension and Efficiency),用于超网络中关键节点的识别。该算法通过3个核心设计综合评估节点的重要性:首先,利用节点超度直接表征其参与交互的规模;其次,通过影响系数来削弱邻接节点的贡献程度;最后,结合节点效率系统分析其在网络中的全局影响力。CDE算法不仅考虑了节点超度的主导作用,还通过引入影响系数来弱化邻接节点的影响,有效融合了局部拓扑特征与全局网络信息,从而实现了节点影响力的全面评估。

1 相关知识

定义1 超图。Berge^[17]首次形式化定义了超图的基本数学结构:设有非空节点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和超边集 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 每条超边 $e_i \in E$ 是节点集 V 的一个非空子集, 则它们构成的二元组 $H = (V, E)$ 称作一个超图。其中, $|V| = n$ 表示网络节点总数, $|E| = m$ 表示超边数。Estrada等^[18]将用超图表示的网络称为超网络,即通过超边表示任意数量节点间交互关系的网络。本文沿用此定义。

定义2 超度。节点的超度表示与该节点相关联的超边数,定义如公式(1)所示:

$$d_H(i) = \sum_{j=1}^m c_{ij} \quad (1)$$

其中, c_{ij} 表示超图关联矩阵 $C(H) = (c_{ij})_{n \times m}$ 中的元素。若节点 v_i 在超边 e_j 中, 则 $c_{ij} = 1$, 否则为0。平均超度指所有节点超度的平均值,定义如公式(2)所示:

$$\langle d_H \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_H(i) \quad (2)$$

定义3 邻接超度。节点的邻接超度表示其所有邻接节点所关联的超边数之和,定义如公式(3)所示:

$$D_H(i) = \sum_{j \in \tau(i)} d_H(j) \quad (3)$$

其中, $\tau(i)$ 表示与节点 v_i 相邻的所有节点的集合。

定义4 超图最短路径^[19]。在超网络中,有限非空集 $W = \{u, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v\}$ 是超网络中节点和超边的交替序列。其中,每条超边 $e_i (1 \leq i \leq k)$ 都包含前一个节点和后一个节点,则 W 是从节点 u 到节点 v 的一条路径,路径长度为 k 。连接节点 u 和节点 v 的最短路径长度即为两节点之间的距离,记为 d_{uv} 。

定义5 节点效率^[6]。节点效率是衡量单个节点在超网络中的信息传播或交互有效性,用以反映该节点与其他节点的连接质量,及其对网络全局功能的贡献,定义如公式(4)所示:

$$E_v(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \frac{1}{d_{ij}} \quad (4)$$

其中, d_{ij} 为节点 v_i 到节点 v_j 的最短超路径长度。

2 基于节点效率的超网络重要节点识别方法

超网络中节点的重要性评估不仅取决于节点自身的超度,还受到邻接节点和网络全局信息的影响。因此,本文构建了一种融合超度和节点效率的节点重要性度量方法 CDE。该方法通过结合超度、邻接超度和节点效率对节点重要性进行评估。该方法通过融合网络的局部信息与全局拓扑属性,有效克服了传统方法在评估视角上较为单一方面的问题。

2.1 CDE算法具体设计

(1) 根据超网络中节点的超度 $d_H(i)$ 和邻接超度 $D_H(i)$, 计算节点的影响系数 ϑ_i 。其计算公式如公式(5)所示:

$$\vartheta_i = \frac{d_H(i)}{d_H(i) + D_H(i)} \quad (5)$$

(2) 结合 $d_H(i)$ 、 $D_H(i)$ 和 ϑ_i , 得到综合超度 $CD(i)$ 。其计算公式如公式(6)所示:

$$CD(i) = d_H(i) + \vartheta_i D_H(i) \quad (6)$$

(3) 结合综合超度 $CD(i)$ 与节点效率 $E_v(i)$, 得到节点的综合重要性值 $CDE(i)$ 。其计算公式如公式(7)所示:

$$CDE(i) = E_v(i) * CD(i) \quad (7)$$

2.2 时间复杂度分析

假设,超网络中节点数为 n 、超边数为 m , k 是网络中一条超边包含的最大节点数。CDE算法的时间复杂度主要由以下3个部分决定:

(1) 计算节点的超度 $d_H(i)$ 的时间复杂度为 $O(m \cdot k)$ 。计算邻接超度 $D_H(i)$ 的关键在于确定其所有邻居,并对它

们的超度进行求和。在最坏情况下,需遍历所有的边,并在每条超边内处理节点对的关系,其时间复杂度为 $O(m \cdot k^2)$ 。因此,计算节点的影响系数 ϑ_i 的时间复杂度为 $O(m \cdot k^2)$ 。

(2)在计算综合超度 $CD(i)$ 时,可以直接利用已经计算出的节点超度等指标。因此,其时间复杂度为 $O(n)$ 。

(3)在计算节点效率时,需计算所有节点对之间的最短路径。为此,需要从每一个节点出发,通过一次广度优先搜索(BFS)来遍历整个网络。计算单个节点效率的时间复杂度为 $O(m \cdot k^2 + n)$ 。因此,计算全部节点效率的时间复

杂度为 $O(n \cdot m \cdot k^2 + n^2)$ 。

将以上 3 个部分的时间复杂度相加,得到整个方法的时间复杂度,其总体的时间复杂度由其中最高项决定。因此,CDE算法的时间复杂度为 $O(n \cdot m \cdot k^2 + n^2)$ 。

3 案例分析

本文选取包含 18 个节点和 15 条超边的小型超网络进行算法的实例分析,如图 1 所示。

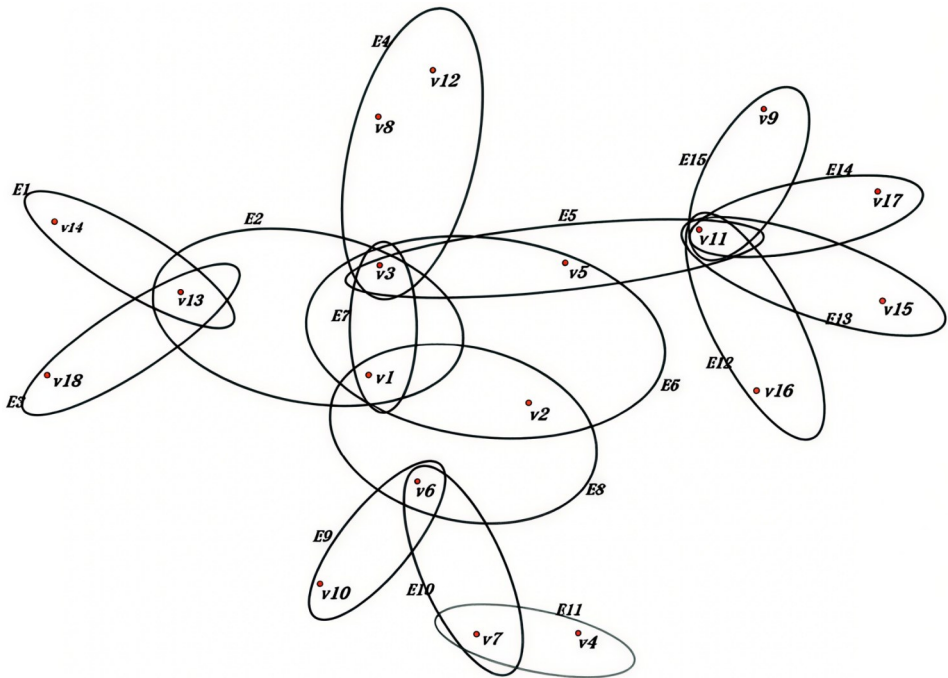


Fig. 1 A case study of a small hypernetwork
图 1 案例分析的小型超网络

以节点 v_3 为例,说明本文算法CDE的计算过程,具体如下:

首先,计算节点 v_3 的超度 $d_H(3)$ 、邻接超度 $D_H(3)$ 和节点效率 $E_v(3)$ 。节点 v_3 关联了超边 E_2 、 E_4 、 E_5 、 E_6 、 E_7 ,所以 $d_H(3) = 5$ 。其邻接节点集为 $\{v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$,具体连接情况如下: v_1 属于超边 E_2 、 E_6 、 E_7 、 E_8 ; v_2 属于超边 E_6 、 E_8 ; v_5 属于超边 E_5 、 E_6 ; v_8 属于超边 E_4 ; v_{11} 属于超边 E_5 、 E_{12} 、 E_{13} 、 E_{14} 、 E_{15} ; v_{12} 属于超边 E_4 ; v_{13} 属于超边 E_1 、 E_2 、 E_3 ; 综合计算得到 $D_H(3) = 18$ 。并依据公式(4)计算得到节点效率 $E_v(3) = 0.672$ 。

其次,由公式(5)得到节点 v_3 的影响系数 ϑ_3 : $\vartheta_3 = 5/(5 + 18) = 0.22$ 。

然后,由公式(6)得到节点 v_3 的综合超度 $CD(3) = d_H(v_3) + \vartheta_3 D_H(v_3) = 5 + 0.22 \times 18 = 8.91$ 。

最后,由公式(7)得到节点 v_3 的综合重要性值 $CDE(3)$: $CDE(3) = E_v(v_3) \cdot C(v_3) = 0.672 \times 8.91 = 5.99$ 。

表 1 展示了图 1 中所有节点的超度(d_H)、邻接超度

(D_H)、影响系数(ϑ)、节点效率(E_v)、综合超度(CD)及本文算法(CDE)。从表中可以看出,节点 v_3 和节点 v_{11} 的综合重要性值较高,在图 1 的超网络中是重要节点。

Table 1 Comprehensive hyper-degree of small hypernetwork
表 1 小型超网络综合超度

节点 编号	d_H	D_H	ϑ	E_v	CD	CDE	节点 编号	d_H	D_H	ϑ	E_v	CD	CDE
1	4	15	0.21	0.60	7.16	4.28	10	1	3	0.25	0.35	1.75	0.61
2	2	14	0.12	0.55	3.75	2.06	11	5	11	0.31	0.60	8.44	5.06
3	5	18	0.22	0.67	8.91	5.99	12	1	6	0.14	0.44	1.86	0.82
4	1	2	0.33	0.29	1.67	0.48	13	3	11	0.21	0.54	5.36	2.91
5	2	16	0.11	0.56	3.78	2.13	14	1	3	0.25	0.36	1.75	0.64
6	3	9	0.25	0.51	5.25	2.68	15	1	5	0.17	0.38	1.83	0.70
7	2	4	0.33	0.39	3.33	1.28	16	1	5	0.17	0.38	1.83	0.70
8	1	6	0.14	0.44	1.86	0.82	17	1	5	0.17	0.38	1.83	0.70
9	1	5	0.17	0.38	1.83	0.70	18	1	3	0.25	0.36	1.75	0.64

表 2 列出了图 1 超网络中,采用超度中心性(HC)、接近中心性(CC)、介数中心性(BC)、核度中心度(KSD)及本文算法(CDE)计算所得的节点重要性排序结果(表中的

others 表示其他所有节点)。由表 2 可知,节点 v_3 在五种算法中均排名第 1。结合网络拓扑结构分析, v_3 不仅拥有全网最高的超度,且位于网络的几何中心。这种多算法的一致性评价也有力地证实了,CDE 算法在识别绝对核心节点方面的准确性。在次要节点的识别上,各算法表现出一定的差异。以节点 v_1 为例,其在 CC(Closeness Centrality)、KSD(K-Shell Decomposition)算法中排名第 2,但在其他指标中排名靠后,表明 v_1 可能位于网络中心位置,但其局部连接强度和中介传输能力较弱。进一步观察排序结果可以发现,传统指标存在严重的数值简并现象,如 HC(Hyper-degree Centrality)和 KSD 算法计算出的节点重要性值存在大量重复,导致整个网络的节点仅被划分为 6~7 个等级,大量节点因排名相同而无法区分优劣。相比之下,CDE 算法的数据显示,除极个别边缘节点外,绝大多数节点都被赋予了唯一的排名值。这种高分辨率的排序结果证明了,CDE 算法通过融合节点效率指标,有效克服了离散型指标的局限性,能够实现对节点重要性的精细化区分。

Table 2 The ranking of node importance obtained by different algorithms

表 2 不同算法的节点重要性排序

节点排名	HC	CC	BC	KSD	CDE	节点排名	HC	CC	BC	KSD	CDE
1	3	3	3	3	3	8	others	5		7	
2	11	1	11	1	11	9	7	others		8、12	
3	1	5	6	11、2	1	10	10			others	
4	13、6	2	1	6	13	11	4			14、18	
5	5、2、7	11、13	13	13、5	6	12				10	
6	others	6	2	7	5	13				4	
7		8、12	7	others	2						

4 评价指标

4.1 单调性指标

单调性指标 $M(R)$ (Monotonicity Index) 用于衡量一个排名或评分系统的区分能力,即评估不同节点的得分是否足够分散,反映算法排序结果的区分度^[20]。定义如公式(8)所示:

$$M(R) = [1 - \frac{\sum_{r \in R} n_r(n_r - 1)}{n(n - 1)}]^2 \quad (8)$$

其中, n_r 表示具有相同排序值 r 的节点数量, R 表示节点排序列表, $M(R) \in [0, 1]$ 。 $M(R)$ 值越接近 1, 代表具有相同值的节点数越少, 排序结果的区分度越高。

4.2 抗毁性

抗毁性测试是评估网络鲁棒性的重要方法,通过模拟对关键节点的针对性攻击来考察网络维持连通性的能力^[21]。首先,根据不同算法对节点重要性值进行排序,依次移除排序后的一定比例节点;其次,观测攻击过程中最大连通子图规模的变化趋势,通过变化曲线斜率差异来评

估不同算法排序的质量。本文在 4 个真实网络上进行蓄意攻击实验,依次移除不同算法排序后的前 5% 的节点,观察网络最大连通子图的变化情况来评估不同算法的性能。

4.3 SIR 传播模型

本文采用 SIR (Susceptible Infectious Removed) (易感-感染-恢复) 模型模拟信息在超网络中的传播过程^[22]。SIR 模型中的节点有 3 种状态:易感 (S)、感染 (I) 和恢复 (R)。初始阶段,将源节点设置为感染态,其余节点均为易感态。源节点在每个时间步长内会以概率 β 感染其邻居节点,同时,已感染的节点以概率 γ 变为恢复态且不再参与后续的传播过程。当网络中不再出现感染节点时,传播过程终止,此时恢复态节点的比例即为源节点的传播影响力。本文在 4 个超网络中进行 SIR 传播模拟实验,通过分析最终感染规模与传播速度等指标,对各算法的有效性进行评估。

5 实验分析

5.1 实验数据来源

本文采用以下 4 个真实静态超网络数据集来验证算法的有效性:①Arenas-email 通信网络^[23]。基于用户间邮件往来数据,采用共同交互原则构造超边,当多位研究者共同与某位学者通信时,构成合作超边;②Cora 引用网络^[24]。通过将每篇引用论文作为超边,其引用的所有被引论文作为成员节点,构建超网络;③Erdos 合作网络^[25]。以数学论文合著关系为基础,每个超边对应一篇合作发表的论文,包含所有合著者节点;④Enron 邮件网络^[26]。源自 CALO 项目整理的 Enron 公司高管邮件记录,以发送者作为超边,包含其所有接收者。超网络的拓扑属性如表 3 所示。

Table 3 Topological properties of the hypernetworks

表 3 超网络的拓扑属性

网络	节点数	超边数	平均超度	聚类系数	平均最短路径
Arenas email	1 133	761	4.82	0.507 3	2.407 7
Cora	1 565	2 222	2.83	0.508 8	4.421 5
Erdos	6 768	507	1.75	0.559 0	1.986 7
Enron	150	143	5.22	0.673 1	2.169 7

5.2 单调性分析

超网络关键节点的识别不仅要求方法具有准确性,更需要其能有效区分不同节点的重要性差异。为了全面评估 CDE 算法及其对比方法的区分效果,本文基于 4 个真实超网络,计算了各算法的单调性指标 $M(R)$,实验结果如表 4 所示。从表 4 可以看出,在 4 个网络中 CC 和 CDE 的 $M(R)$ 值普遍接近于 1,且显著高于其他方法,表明它们能更精细地区分节点的重要性,减少排名重复的情况。同时,仅在 Erdos 超网络中,CDE 的单调性略低于 CC;除此之外,CDE 在所有受测网络中的 $M(R)$ 值均为最高,表明 CDE 能够更有效地解决排名重复问题,为超网络分析提供了更精

细的排序结果。

Table 4 The M(R) values of four hypernetworks
表 4 四个超网络的单调性指标

网络	HC	CC	BC	KSD	CDE
Arenas email	0.888 6	0.988 5	0.953 3	0.959 9	0.999 4
Cora	0.770 7	0.991 4	0.728 9	0.838 4	0.992 7
Erdos	0.454 9	0.989 8	0.478 2	0.912 6	0.981 4
Enron	0.899 7	0.990 6	0.947 1	0.962 5	0.998 5

5.3 抗毁性分析

本文选取 4 个真实网络(Arenas email、Cora、Erdos、Enron)开展抗毁性分析实验,将本文算法 CDE,与 HC、CC、BC 及 KSD 这 4 种基准算法进行对比验证。实验设计采用蓄

意攻击策略:基于各算法生成的节点重要性排序列表,以 5% 为步长依次移除关键节点,实时监测网络效率指标的动态变化过程。

图 2 呈现了不同算法下网络最大连通子图规模的变化曲线。从图 2 可以看出,本文提出的 CDE 算法在 4 个真实网络的抗毁性测试中均表现出色。采用 CDE 算法在 4 个网络中进行抗毁性实验,网络的最大连通子图规模下降都较快。特别是在 Cora 网络中,当删除网络前 20% 的节点后,网络连通性几乎完全丧失。本实验验证了 CDE 算法在识别网络结构脆弱性方面的优越性,其通过融合网络拓扑特征与邻域影响力,能更精准地定位网络中的枢纽节点。

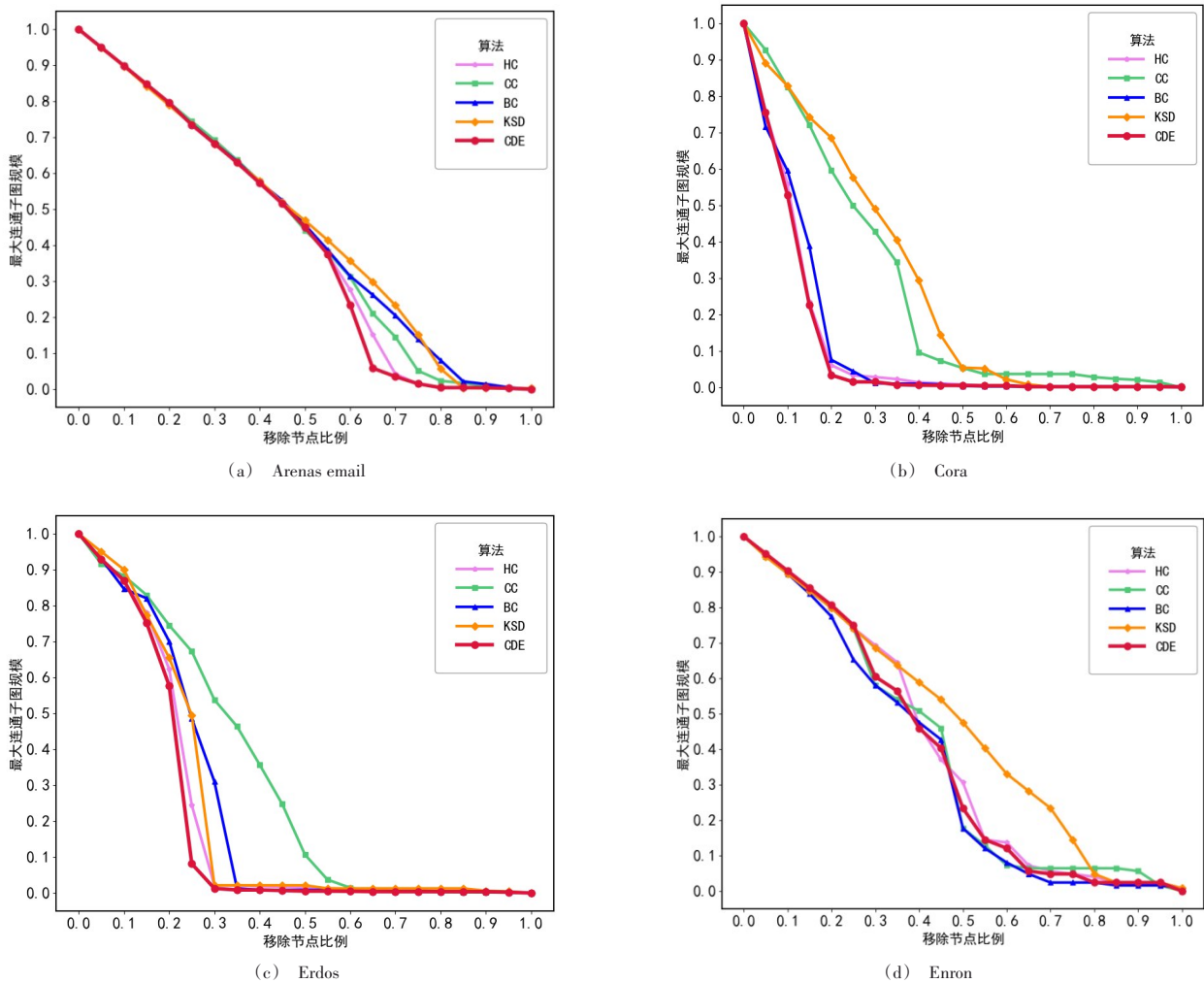


Fig. 2 The change curve of the largest connected component size under targeted attacks

图 2 蓄意攻击下最大连通子图规模的变化曲线

5.4 SIR 传播实验

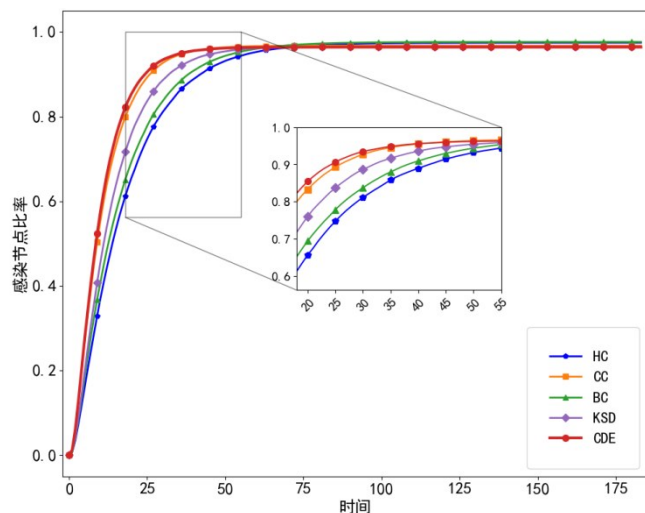
本文采用 SIR 传播模型在 4 个真实网络(Arenas email、Cora、Erdos、Enron)上进行了系统性仿真实验,以验证不同节点重要性识别算法的有效性。选取各算法排名前 5% 的节点作为初始源节点,其余节点都为易感态。设置传播率 $\beta=1/\langle d_H \rangle$, 基于 10 天平均感染期的假设,本文将恢复率 γ 设置为 0.1,以模拟中等恢复速率的传播场景。每个实验

均重复进行 1 000 次,并取其平均值,以减小随机性的影响。实验结果如图 3 所示。

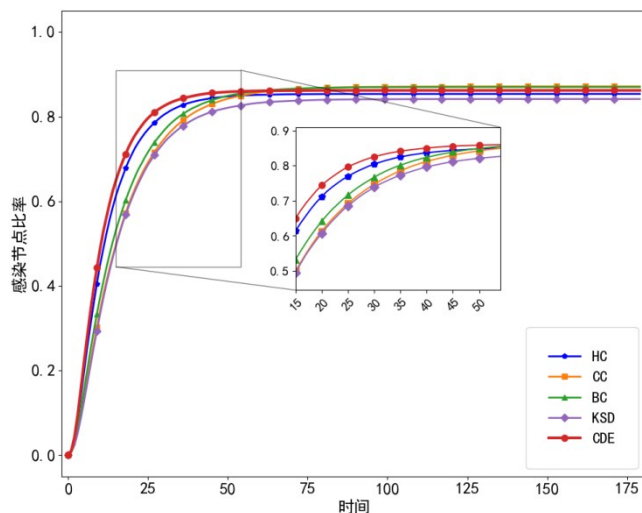
从图 3 可以看出,5 种算法(包括 4 种对比算法和本文提出的算法)的 SIR 传播曲线。在某些时间段内存在一定的重合,但 CDE 算法识别出的 top 5% 关键节点表现出显著的传播优势。从图 3 的局部放大图可知,CDE 算法的 SIR 传播感染规模在相同时间始终维持更高水平。同时,通过

观察曲线的斜率可以看出,CDE算法在SIR模型中的传播速度具有明显优势。这些结果表明,CDE能够有效地识别

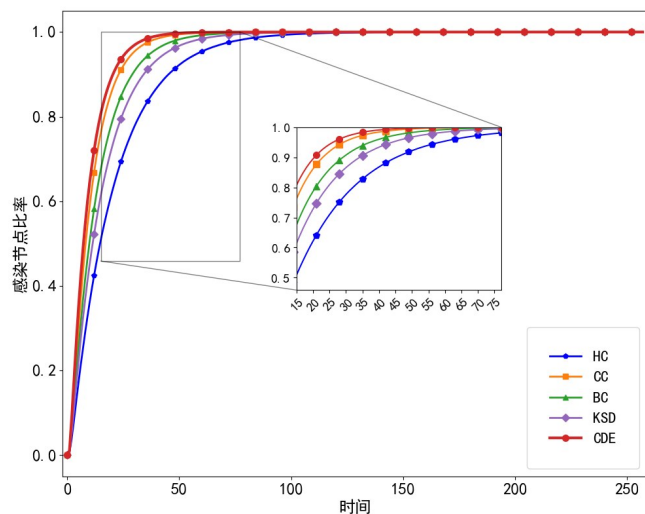
网络中的重要节点,验证了CDE算法在传播模型中的有效性。



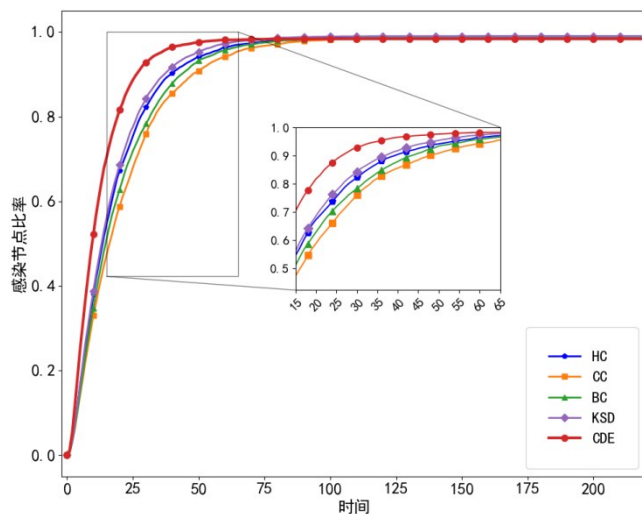
(a) Arenas email



(b) Cora



(c) Erdos



(d) Enron

Fig. 3 Infection rate curve of nodes in the SIR experiment

图3 SIR实验感染节点变化率曲线

6 结语

本文提出了一种融合超度特征和节点效率的超网络节点重要性度量方法(CDE)。该方法考虑了网络节点的局部特征,融合了超度与邻接超度两种指标,并最终结合节点效率,从全局角度对节点影响力进行表征。将本文算法在4个真实超网络上进行对比实验,单调性分析结果证实了CDE算法对节点重要性具有较高的区分能力,在抗毁性测试中也表现出色。在SIR传播模型中,CDE识别出的关键节点具有较好的传播效果,从而验证了该算法在超网络节点重要性识别中的有效性。本文算法考虑了网络的局部特征以及全局拓扑结构特性来识别重要节点,但只基

于静态单层网络模型进行分析,而实际复杂系统往往呈现出时变特性和多维的网络关系。后续研究将考虑构建动态的多层超网络模型,探究时序网络与多层网络中节点的重要性,以增强算法在真实场景中的应用能力。

参考文献:

- [1] NEWMAN M E J. Networks: an introduction[M]. Oxford: Oxford University Press, 2018.
- [2] LU L, CHEN D B, REN X L, et al. Vital nodes identification in complex networks[J]. Physics Reports, 2016, 650: 1-63.
- [3] BRETTO A. Hypergraph theory: an introduction[M]. Cham: Springer, 2013.
- [4] BATTISTON F, BIANCONI G, LATORA V, et al. The physics of higher-order interactions in complex systems [J]. Nature Physics, 2021, 17 (10): 1093-1098.

- [5] ESTRADA E, RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ J A. Spectral measures of bipartivity in complex networks [J]. *Physical Review E*, 2006, 74 (4): 046114.
- [6] BRANDES U, BORGATTI S P, FREEMAN L C. Maintaining the duality of closeness and betweenness centrality [J]. *Social Networks*, 2016, 44: 153–159.
- [7] ESTRADA E, RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ J A. Subgraph centrality and clustering in complex hyper-networks [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2006, 364: 581–594.
- [8] KOVALENKO K, TUTUNOV B, MIRONOV V, et al. Vector centrality in networks with higher-order interactions [DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2108.13846v1>.
- [9] BENSON A R, HASHEMI A. Higher-order centrality for hypergraphs [J]. *Nature Communications*, 2024, 15: 576.
- [10] WU Y H, TIAN K, LI M D, et al. Identifying vital nodes in hypernetworks using node propagation entropy [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2023, 59(19): 66–74.
吴英晗, 田阔, 李明达, 等. 利用节点传播熵识别超网络重要节点 [J]. *计算机工程与应用*, 2023, 59(19): 66–74.
- [11] XIE M, ZHAN X X, LIU C, et al. An efficient adaptive degree-based heuristic algorithm for influence maximization in hypergraphs [J]. *Information Processing & Management*, 2023, 60(2): 103161.
- [12] ZHOU L N, LI F X, GONG Y C, et al. A K-shell-based method for identifying key nodes in hypernetworks [J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2021, 18(3): 15–22.
周丽娜, 李发旭, 巩云超, 等. 基于K-shell的超网络关键节点识别方法 [J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2021, 18(3): 15–22.
- [13] XIE X, ZHAN X, ZHANG Z, et al. Vital node identification in hypergraphs via gravity model [J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Non-linear Science*, 2023, 33(1): 013119.
- [14] ZHOU L N, CHANG X, HU F. Using adjacent structure entropy to determine vital nodes of hypernetwork [J]. *Journal of Computer Engineering & Applications*, 2022, 58(8): 76–82.
周丽娜, 常笑, 胡枫. 利用邻接结构熵确定超网络关键节点 [J]. *计算机工程与应用*, 2022, 58(8): 76–82.
- [15] TU G Y, PAN W L, ZHANG T J. Identification methods of important nodes based on information entropy in hypernetwork [J/OL]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2023–12–04. <https://link.cnki.net/urlid/37.1402.N.20231204.0952.002>.
- [16] ZHU F Q, JIA X Y, WEI L, et al. Identification method of node importance in hypernetworks based on multi-index decision matrix [J/OL]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2024–09–26. <https://link.cnki.net/urlid/37.1402.N.20240926.1155.008>.
朱福祺, 贾晓妍, 卫良, 等. 基于多指标决策矩阵的超网络节点重要性辨识方法 [J/OL]. *复杂系统与复杂性科学*, 2024–09–26. <https://link.cnki.net/urlid/37.1402.N.20240926.1155.008>.
- [17] BERGE C. *Graphs and hypergraphs* [M]. New York: Elsevier, 1973.
- [18] ESTRADA E. Network robustness to targeted attacks: the interplay of expansibility and degree distribution [J]. *European Physical Journal B*, 2006, 52(4): 563–574.
- [19] YUAN Y, WANG L, LU J. Efficient shortest path algorithms on hypergraphs via vertex and edge reduction [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, 34(5): 2456–2469.
- [20] LIU J, XIONG Q, SHI W, et al. Evaluating the importance of nodes in complex networks [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 452: 209–219.
- [21] ZHAO L, JIA T, LIU J, et al. Robustness of hypernetworks under node attacks [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 454: 327–333.
- [22] ZHAO D, LI S, WANG R, et al. Epidemic spreading on hypergraphs: thresholds and mitigation strategies [J]. *Physical Review E*, 2020, 102 (6): 062309.
- [23] BENSON A R, GLEICH D F, LIM L H. Simplicial closure and higher-order link prediction [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2018, 115(48): E11221–E11230.
- [24] ROY S, RAVINDRAN B. Measuring network centrality using hypergraphs [C]//*Proceedings of the 2nd ACM IKDD Conference on Data Sciences*, 2015: 59–68.
- [25] NEWMAN M E J. The structure of scientific collaboration networks [J]. *PNAS*, 2001, 98(2): 404–409.
- [26] GHOSH R, LERMAN K. A framework for quantitative analysis of cascades on networks [C]//*Proceedings of the Fifth ACM International Conference on Web Search and Data Mining*, 2012: 125–134.

(责任编辑:陈维捷)